Title	極小ログ食い違い係数の半連続性問題について
Author(s)	中村, 勇哉
Citation	代数幾何学シンポジウム記録 (2013), 2013: 136-144
Issue Date	2013
URL	http://hdl.handle.net/2433/214991
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

代数幾何学シンポジウム記録
2013年度　pp.136-144

極小ログ食い違い係数の半連続性問題について

中村 勇哉*

この記事は論文 [13] の内容の解説である.

1　イントロダクション

極小ログ食い違い係数は, フリップの停止問題を局所的な特異点の問題に帰着させるために Shokurov によって定義された, 特異点の不変量である. 極小ログ食い違い係数に関し 2 つの予想, ACC 予想 (ascending chain condition conjecture) と LSC 予想 (lower semi-continuity conjecture) がある. Shokurov によって, この 2 つの予想から, フリップの停止問題が証明できることが知られている [15]. 以下, 極小ログ食い違い係数を定義し, ACC 予想, LSC 予想の内容を説明する. その後, 今までに知られている結果を紹介し, 今回証明したケースを紹介する.

2　極小ログ食い違い係数の定義

極小ログ食い違い係数は**ログ対** $(X, \mathfrak{a})$ と呼ばれる正規 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 代数多様体 X とその $\mathbb{R}$-イデアル $\mathfrak{a}$ の組に対して定義される不変量である. ここで $\mathbb{R}$-イデアルとは通常のイデアル層 $\mathfrak{a}_i$ の形式的 $\mathbb{R}_{>0}$ 乗積 $\prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i}$ のことをさす.

注 2.1. 通常, 双有理幾何学においては, ログ対 (X, Δ) といった場合, Δ は X の $\mathbb{R}$-Cartier 因子を表すのが普通である. Δ に対応する $\mathbb{R}$-イデアルを考えることで, 今回のログ対の概念は通常のものの拡張になっている.

また今回は簡単のために考えないが, 上記ログ対ではなく, ログ鼎 (log triple) $(X, \Delta, \mathfrak{a})$ とよばれるより一般の概念を扱う. ここで, X は正規代数多様体, Δ は $K_X + \Delta$ が $\mathbb{R}$-Caritier になっているような $\mathbb{R}$-Weil 因子, $\mathfrak{a}$ は X 上の $\mathbb{R}$-イデアルを表す (X に

* 東京大学数理科学研究科, nakamura@ms.u-tokyo.ac.jp

$\mathbb{Q}$-Gorenstein 性を仮定しない).

E を X 上空の因子, 即ち固有双有理射 $f : X' \to X$ が存在して E は X' 上の因子になっているようなものとする. このとき, ログ対 $(X, \mathfrak{a})$ の E に関する**ログ食い違い係数** $a_E(X, \mathfrak{a})$ が次のように定義される：

$$a_E(X, \mathfrak{a}) := 1 + \operatorname{ord}_E(K_{X'} - f^*K_X) - \operatorname{ord}_E \mathfrak{a}.$$

ここで, $\operatorname{ord}_E \mathfrak{a} := \sum_{i=1}^{s} r_i \operatorname{ord}_E \mathfrak{a}_i$ として $\mathbb{R}$-イデアルの order を定義している.

Z を X の閉集合としたとき, Z における**極小ログ食い違い係数** $\operatorname{mld}_Z(X, \mathfrak{a})$ が次のように定義される：

$$\operatorname{mld}_Z(X, \mathfrak{a}) := \inf_{\mathrm{c}_X(E) \subset Z} a_E(X, \mathfrak{a}).$$

ここで, E はその X でのセンター $\mathrm{c}_X(E)$ が Z に含まれるようなすべての X 上空の因子を動く. またここで, **センター** $\mathrm{c}_X(E)$ は, E の X での像 $f(E)$ として定義される.

3 極小ログ食い違い係数に関する予想

今回扱う ACC 予想と LSC 予想とは以下のような予想である.

予想 3.1 (ACC 予想 (ascending chain condition conjecture))**.** 非負整数 n と集合 $\Gamma \subset [0, 1]$ を固定する. Γ が降鎖律 (DCC) をみたすとき, 次の集合

$$\left\{ \operatorname{mld}_x \left(X, \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i}\right) \;\middle|\; \left(X, \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i}\right) \text{ は } n \text{ 次元ログ対}, \ r_i \in \Gamma, \ x \in X \right\}$$

は昇鎖律 (ACC) をみたす.

予想 3.2 (LSC 予想 (lower semi-continuity conjecture))**.** $(X, \mathfrak{a})$ をログ対とするときに, 次の関数

$$|X| \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}; \qquad x \mapsto \operatorname{mld}_x(X, \mathfrak{a})$$

は下半連続である. ここで $|X|$ によって X の閉点の集合を表す.

事実 3.3. ACC 予想は以下の場合に正しいことが知られている：

(1) (Ambro [3]) $(X, \mathfrak{a})$ がトーリック対 (5 章を参照) であるものに限定した場合.

(2) (Alexeev [1], Shokurov [14]) $\dim X = 2$ の場合.

(3) (川北 [9]) 代数多様体 X を固定し, Γ が有限集合である場合.

事実 3.4. LSC 予想は以下の場合に正しいことが知られている：

(1) (Ambro [2]) $(X, \mathfrak{a})$ がトーリック対である場合.
(2) (Ambro [2]) $\dim X \leq 3$ の場合.
(3) (Ein, Mustaţă, 安田 [7]) X が非特異である場合.
(4) (Ein, Mustaţă [6]) X が局所交叉代数多様体である場合.

上記 (3) の結果にはジェットスキームの理論が使われている．極小ログ食い違い係数はジェットスキームを用いて表すことができ, この表示は多様体が非特異である場合には, 表示がきれいなものになっている．この表示を用いて LSC 予想が正しいことが示されている．(4) の結果は逆同伴定理を用いて (3) の結果に帰着させることで示された．今回の目的の 1 つは, 結果 (3) の別の方向の拡張として, 高々商特異点をもつような代数多様体について LSC 予想が正しいことを示すことである．

ACC 予想に関連して, Mustaţă によって提起されたイデアル進半連続性予想 (ideal-adic semi-continuity conjecture) というものがある：

予想 3.5 (Mustaţă [8])**.** $(X, \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i})$ をログ対とし, Z を X の閉集合とする．このとき, 正整数 l が存在して, $\mathfrak{a}_i + I_Z^l = \mathfrak{b}_i + I_Z^l$ をみたす任意のイデアル層 $\mathfrak{b}_i$ に対し,

$$\mathrm{mld}_Z\left(X, \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i}\right) = \mathrm{mld}_Z\left(X, \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{b}_i^{r_i}\right)$$

が成り立つ．ここで, I_Z で Z の定義イデアル層を表している．

この予想はイデアルの generic limit と呼ばれる手法により ACC 予想と関連している [8]．generic limit は Kollár [11] によって導入さた．その手法を用いて de Fernex, Ein, Mustaţă がログ標準閾値 (log canonical threshold) に対する ACC 予想を非特異多様体に対して証明した ([4], [5]) という経緯がある．その証明の鍵になっているのが, 上記イデアル進半連続性予想のログ標準閾値版であり, 極小ログ食い違い係数に対しても成立が期待されている．

事実 3.6. 予想 3.5 は以下の場合に正しいことが知られている：

(1) (de Fernex, Ein, Mustaţă [4]) $\mathrm{mld}_Z(X, \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i}) = 0$ である場合.
(2) (Kawakita [8]) $(X, \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i})$ が高々 klt (Kawamata log terminal) 特異点である場合.
(3) (Kawakita [10]) $\dim X = 2$ である場合.

今回の目的のもう 1 つは, 予想 3.5 を $(X, \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i})$ がトーリック対である場合に証明することである.

4　商特異点に対する LSC 予想

今回, 論文 [13] で証明したのは次の結果である.

定理 4.1. X を正規代数多様体とし, Deligne-Mumford スタックの圏でクレパント特異点解消をもつと仮定する. このとき, 以下が成立する.

(1) $\mathfrak{a}$ を X 上の $\mathbb{R}$-イデアルとする. このとき関数

$$|X| \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}; \qquad x \mapsto \operatorname{mld}_x(X, \mathfrak{a})$$

は下半連続となる.

(2) T を代数多様体とし, $\mathfrak{A}$ を $X \times T$ 上の $\mathbb{R}$-イデアル, x を X の閉点とする. このとき関数

$$|T| \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}; \qquad p \mapsto \operatorname{mld}_x(X, \mathfrak{A}_p)$$

は下半連続となる. ここで, $\mathfrak{A}_p$ は $\mathfrak{A}$ の $X \times \{p\}$ への制限を表すものとする.

上記 (1) は LSC 予想に他ならない. (2) もある種の半連続性を主張している. (1) では極小ログ食い違い係数を量る点 x を動かした場合の半連続性を主張しているのに対し, (2) では x を固定し, その代わりイデアルを別の代数多様体 T 上で動かした場合の半連続性を主張している. (2) は次の章で予想 3.5 をトーリック対に対して証明する際に必要となる.

有限群 G が非特異多様体 X に余次元 1 で自由に作用していると仮定する. $[X/G]$ でスタックの意味での商を表すことにすると, 自然な射 $[X/G] \to X/G$ は X/G のクレパント特異点解消を与えている. よって次の系を得る.

系 4.2. 高々商特異点しかもたない代数多様体 X に対し LSC 予想が成立する.

以下, 定理 4.1 (2) の証明の概略を述べる. X が非特異である場合にはジェットスキームの理論を用いて示すことができる (4.2 節). 一般の場合 (商特異点などを扱う場合) の証明は割愛し, 補足するに留めた (4.3 節).

4.1 ジェットスキーム

まずは, 必要となるジェットスキームについて性質を確認しておく. $\mathbb{C}$ 上のスキーム X と整数 $m \geq 0$ に対し, m-**ジェットスキーム**を $J_m X$ とかく. 今回の解説では, 以下の性質を用いる.

(1) $J_m(X)$ は集合としては (即ち $\mathbb{C}$-値点全体は) 射 $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]/(t^{m+1}) \to X$ 全体と同一視される.
(2) (truncation morphism) $m \geq n$ に対して, $\varphi_{m,n} : J_m X \to J_n X$ が自然に定まる. これは集合論的には $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]/(t^{n+1}) \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]/(t^{m+1})$ の合成として得られている.
(3) $J_0 X$ と X は自然に同一視される.
(4) Y を X の閉部分スキームとするとき, $J_m Y$ は $J_m X$ の閉部分スキームと自然にみなせる.

Ein, Mustaţă, 安田 [7] によって極小ログ食い違い係数はジェットスキームの言葉で記述できることが知られている.

定理 4.3 (Ein, Mustaţă, 安田 [7])**.** X を非特異多様体, Z を X の部分集合, $\mathfrak{a}$ を X 上のイデアル層, Y を $\mathfrak{a}$ に対応する X の閉部分スキームとする. r を正実数とするとき,

$$\operatorname{mld}_Z(X, \mathfrak{a}^r) = \inf_{m \geq 0} \left\{ (m+1)\dim X - rm - \dim(\varphi_{m,0}^{-1}(Z) \cap J_m Y) \right\}$$

が成立する. ここで $\varphi_{m,0}^{-1}(Z) \cap J_m Y$ は $J_m X$ のなかで交わりをとっている (ジェットスキームの性質から, $J_m X \xrightarrow{\varphi_{m,0}} J_0 X \cong X$ および $J_m Y \subset J_m X, Z \subset X$ であるので).

注 4.4. Ein, Mustaţă, 安田 [7] は非特異とは限らない代数多様体も扱っている. この場合の記述は定理 4.3 のものより「複雑」なものになる (4.3 節も参照). また簡単のため, 上記定理では $\mathbb{R}$-イデアルのうち $\mathfrak{a}^r$ とかけるものしか扱っていない.

多様体族に対して極小ログ食い違い係数を扱いたいので, **相対的ジェットスキーム** (relative jet scheme) を必要とする.

定理 4.5 (Mustaţă [12])**.** W を S 上のスキームとする. このとき S 上のスキーム $J_m(W/S)$ が存在して, 任意の閉点 $p \in S$ について,

$$J_m(W/S)_p \cong J_m(W_p)$$

が成り立つ．ここで $*_p$ により, p でのファイバーを表している．

4.2　X が非特異の場合

次を示すのが目標である．

> X を非特異多様体, T を代数多様体, $\mathfrak{A}$ を $X \times T$ 上のイデアル層, $r > 0$ を正実数とする．このとき関数
>
> $$|T| \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{-\infty\}; \qquad p \mapsto \mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{A}_p^r)$$
>
> は下半連続となる．

$\mathfrak{A}$ に対応する $X \times T$ の閉部分スキームを Y とする．$X \times T$ の T 上の相対的ジェットスキームを考えると

$$J_m(X \times T/T) \xrightarrow{\varphi_{m,0}} J_0(X \times T/T) = X \times T \to T$$

を得る．このとき

$$J_m(Y/T) \subset J_m(X \times T/T), \qquad \{x\} \times T \subset J_0(X \times T/T)$$

とみなすことができる．ここで, $F_m : S_m \to T$ を次のように定める：

- $S_m := J_m(Y/T) \cap \varphi_{m,0}^{-1}(\{x\} \times T)$,
- $F_m : S_m \to T$ は $\varphi_{m,0}$ と射影 $X \times T \to T$ の合成.

すると, 任意の閉点 $p \in T$ に対し,

$$F_m^{-1}(p) \cong J_m(Y_p) \cap \varphi_{m,0}^{-1}(x)$$

が成立していることが, 相対的ジェットスキームの定義からわかる．

定理 4.3 によって, $\mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{A}_p^r)$ を F_m のファイバーの次元を使って表すことができる：

$$\begin{aligned}\mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{A}_p^r) &= \inf_{m \geq 0} \left\{(m+1)\dim X - rm - \dim(J_m(Y_p) \cap \varphi_{m,0}^{-1}(x))\right\} \\ &= \inf_{m \geq 0} \left\{(m+1)\dim X - rm - \dim F_m^{-1}(p)\right\}.\end{aligned}$$

この記述によって $\mathrm{mld}_x(X, \mathfrak{A}_p^r)$ の下半連続性は $\dim F_m^{-1}(p)$ の上半連続性に言い換えることができた.

主張 4.6. 各 $m \geq 0$ について, 関数

$$T \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad p \mapsto \dim F_m^{-1}(p)$$

は上半連続となる.

F_m は固有射ではないので, この主張は自明ではない. しかし, $\varphi_{m,0} : J_m(X \times T/T) \to X \times T$ のファイバーに作用する $\mathbb{C}^*$-作用での商を考えることで, 固有射のファイバーの次元の上半連続性に帰着できる.

4.3 X が一般の場合

定理 4.3 において, X は非特異と仮定しているが, 非特異ではない代数多様体に対しても (より複雑な形にはなるが) 極小ログ食い違い係数をジェットスキームの言葉で表すことができる (Ein, Mustaţă, 安田 [7]). しかし, LSC 予想を示すにあたって同様の議論をしようとすると, 記述が「複雑」なため同じ議論が適用できない. そこで, [13] においては, 安田の捩れジェットスタックを利用して, 商特異点などの場合に議論を拡張している.

安田は [16], [17] において, Deligne-Mumford スタックに対してジェットスキームのスタック版に対応する捩れジェットスタックを定義し, Deligne-Mumford スタック上のモチーフ積分の理論を展開している.

X を正規代数多様体とし, Deligne-Mumford スタックの圏でクレパント特異点解消 $f : \mathcal{X} \to X$ をもつと仮定する. まず Ein, Mustaţă, 安田の理論により $(X, \mathfrak{a})$ の極小ログ食い違い係数は X 上のジェットスキームの次元で記述できる. 次に安田の捩れジェットスタックの理論を使うことで, これは $\mathcal{X}$ 上の捩れジェットスタックの次元で記述できる. そして, f がクレパントであることと $\mathcal{X}$ がスタックの意味で非特異であることを用いると, この記述が「よい」ものになっていることがわかる. 「よい」ものになっている理由は, 定理 4.3 の記述が X が非特異の場合に「よい」ものになっているのと同じ理由であるが, ここでは割愛する. この「よい記述」を使うことで LSC 予想が証明できる.

5 トーリック対に対する予想 3.5

定理 4.1 を使うことでトーリック対に対して予想 3.5 を証明することができる. ここで**トーリック対** $(X, \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{a}_i^{r_i})$ とは, X が正規トーリック多様体であり, 各イデアル $\mathfrak{a}_i$ がトーラス不変であるようなものをさす.

定理 5.1. $(X, \mathfrak{a})$ をトーリック対とし, Z をトーラス不変な X の閉集合とする. このとき, 予想 3.5 が $(X, \mathfrak{a}), Z$ に対して成立する.

注 5.2. 上記の定理において, $\mathbb{R}$-イデアル $\mathfrak{a}$ はトーラス不変であることを仮定しているが, 予想 3.5 における $\mathfrak{b}$ に関してはトーラス不変であることを仮定していない. よって, トーリック対の組み合わせ論的な記述だけでは証明することはできない.

以下, 証明の概略を述べる.

ここでは簡単のため $s = 1$ とし, 示すべきの等式のうち, 不等式

$$\mathrm{mld}_Z\big(X, \mathfrak{a}^r\big) \leq \mathrm{mld}_Z(X, \mathfrak{b}^r)$$

を示す (逆の不等式は常に成立することが知られている).

まず, 局所的な問題であるので, X は始めからアファイントーリック多様体と仮定してよい. また, アファイントーリック多様体はトーリック多様体の圏において small $\mathbb{Q}$-factorial modification をもつので, X はアファイン $\mathbb{Q}$-分解的なトーリック多様体であると仮定してよい. あとで重要となるのは, このような X は高々商特異点しかもたないので, 定理 4.1 が適用できることである.

証明のアイデアは, トーリック不変とは限らない $\mathfrak{b}$ の退化を考えて, $\mathfrak{a}$ と比較することである. この退化によって極小ログ食い違い係数が下がることは定理 4.1 によって保証されている. これにあたり, 次のようなうまい退化を選ぶ必要がある.

補題 5.3. $(X, \mathfrak{a})$ を上記とする. このとき, トーラス $T \subset X$ の 1 次元部分トーラス $T' \cong \mathbb{C}^*$ であって, 次をみたすものが存在する：

(1) T' に対応する $\mathfrak{b}$ の退化を $\mathfrak{b}_0$ とするとき, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}_0$ が成立する.
(2) Z の任意の点は T'-固定点である.

この補題は組み合わせ論的な議論で証明できる.

補題 5.3 (1) により,

$$\mathrm{mld}_Z\big(X, \mathfrak{a}^r\big) \leq \mathrm{mld}_Z(X, \mathfrak{b}_0^r)$$

が従う. また X は高々商特異点しかもたないので, 定理 4.1 (2) により

$$\mathrm{mld}_Z(X, \mathfrak{b}_0^r) \leq \mathrm{mld}_Z(X, \mathfrak{b}^r)$$

が従う (正確には $\dim Z = 0$ ではないので定理は適用できない. しかし補題 5.3 (2) の条件を使うことで同様に証明できる). 以上で所望の不等式が得られる.

参考文献

[1] V. Alexeev, *Two two-dimensional terminations*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 3, 527–545.

[2] F. Ambro, *On minimal log discrepancies*, Math. Res. Lett. **6** (1999), no. 5-6, 573–580.

[3] ———, *The set of toric minimal log discrepancies*, Cent. Eur. J. Math. **4** (2006), no. 3, 358–370 (electronic).

[4] T. de Fernex, L. Ein, and M. Mustaţă, *Shokurov's ACC conjecture for log canonical thresholds on smooth varieties*, Duke Math. J. **152** (2010), no. 1, 93–114.

[5] T. de Fernex and M. Mustaţă, *Limits of log canonical thresholds*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **42** (2009), no. 3, 491–515.

[6] L. Ein and M. Mustaţă, *Inversion of adjunction for local complete intersection varieties*, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 6, 1355–1365.

[7] L. Ein, M. Mustaţă, and T. Yasuda, *Jet schemes, log discrepancies and inversion of adjunction*, Invent. Math. **153** (2003), no. 3, 519–535.

[8] M. Kawakita, *Ideal-adic semi-continuity problem for minimal log discrepancies*, available at `arXiv:1012.0395v1`.

[9] ———, *Discreteness of log discrepancies over log canonical triples on a fixed pair*, available at `arXiv:1204.5248v1`.

[10] ———, *Ideal-adic semi-continuity of minimal log discrepancies on surfaces*, available at `arXiv:1205.6014v1`.

[11] J. Kollár, *Which powers of holomorphic functions are integrable?*, available at `arXiv:0805.0756v1`.

[12] M. Mustaţă, *Singularities of pairs via jet schemes*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 3, 599–615.

[13] Y. Nakamura, *On semi-continuity problems for minimal log discrepancies*, available at `arXiv:1305.1410v2`.

[14] V. V. Shokurov, *A.c.c. in codimension 2* (1993, preprint).

[15] ———, *Letters of a bi-rationalist. V. Minimal log discrepancies and termination of log flips*, Tr. Mat. Inst. Steklova **246** (2004), no. Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 328–351; English transl., Proc. Steklov Inst. Math. (2004), no. 3 (246), 315–336.

[16] T. Yasuda, *Twisted jets, motivic measures and orbifold cohomology*, Compos. Math. **140** (2004), no. 2, 396–422.

[17] ———, *Motivic integration over Deligne-Mumford stacks*, Adv. Math. **207** (2006), no. 2, 707–761.